

1- мустақил иш

Аникмас интегралларни топинг, интеграллаш натижаларини дифференциаллаш билан текширинг:

$$1. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt[3]{\ln(x+1)}}.$$

$$2. \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x} dx.$$

$$4. \int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx.$$

$$5. \int e^{4-5x^2} x dx.$$

$$6. \int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}} dx.$$

$$7. \int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx.$$

$$8. \int \frac{e^{3x} dx}{4-e^{6x}}.$$

$$9. \int \sin^2 (2x-1) dx.$$

$$10. \int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3} dx.$$

$$11. \int \sin 3x \cos x dx.$$

$$12. \int \frac{dx}{4x^2-5x+4}.$$

2- §. Аникмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Бўлаклаб интеграллаш

6.2.1. Аникмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш қуйидагича амалга оширилади:

а) $x = \varphi(t)$, бунда $\varphi(t)$ — янги ўзгарувчи t нинг дифференциалланувчи функцияси бўлсин. Бу ҳолда ўзгарувчини алмаштириш формуласи ушбу кўринишга эга:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt;$$

б) $\Psi(x) = t$, бунда t — янги ўзгарувчи. Бу ҳолда ўзгарувчини алмаштириш формуласи ушбу кўринишга эга:

$$\int f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Иккала ҳолда ҳам интеграллашдан кейин ўзгарувчи x га қайтиш керак.

1- мисол. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ аникмас интегрални топинг.

Ечиш. $x = a \sin t$ десак, $dx = a \cos t dt$ бўлади ва аникмас интеграл ушбу кўринишни олади:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = \\ &= \int \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C.$$

Энди

$$\begin{aligned} t &= \arcsin \frac{x}{a} \text{ ва } \sin 2t = 2 \sin t \cos t = \\ &= 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \end{aligned}$$

тенгликлардан фойдаланиб эски ўзгарувчи x га қайтамыз:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

2- м и с о л. Аникмас интегрални топинг:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx$$

Е ч и ш. $x = atgt$ деб белгиласак, $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$ бўлади. Буни ҳисоб-га олиб аникмас интегрални топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{a^2 t^2 + a^2}}{a^2 t^2} \cdot \frac{adt}{\cos^2 t} = \\ &= \int \frac{\sqrt{1 + t^2}}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t \cdot \cos t} = \\ &= \int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^2 t \cdot \cos t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt + \int \frac{dt}{\cos t} = \\ &= \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} + \int \frac{dt}{\cos t} = -\frac{1}{\sin t} + \ln \left| \frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t \right| + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}} + \ln \left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right| + C = \\ &= -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a} \right| + C. \end{aligned}$$

3- м и с о л. Аникмас интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}.$$

Е ч и ш. Илдиз остидаги ифодани t^2 билан белгиласак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} &= \left\{ \begin{array}{l} 2x-9=t^2; \quad t=\sqrt{2x-9}; \\ x=\frac{1}{2}(t^2+9); \quad dx=tdt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{tdt}{\frac{1}{2}(t^2+9) \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{9+t^2} = \frac{2}{3} \arctg \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{2}{3} \arctg \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C. \end{aligned}$$

4-мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Е ч и ш. $t = \frac{1}{x+1}$ янги ўзгарувчини киритамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x+1}; \quad x = \frac{1}{t} - 1; \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \frac{1}{t} - 1 - 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+t-2t^2}} = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}} = - \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}} = \arccos \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \\ &= \arccos \frac{2t+1}{\sqrt{5}} + C = \arccos \frac{\frac{2}{x+1}+1}{\sqrt{5}} + C = \\ &= \arccos \frac{x+3}{\sqrt{5}(x+1)} + C. \end{aligned}$$

6.2.2. Бўлаклаб интеграллаш усули

$$\int u dv = uv - \int v du$$

формулага асосланиб, бунда u ва v — x нинг интегралланувчи функциялари.

Бу усул ҳар хил синфдаги функциялар кўпайтмаларини интеграллашда фойдаланилади:

$$\begin{aligned} &\int P_n(x) e^{ax} dx, \int P_n(x) \cos ax dx, \int P_n(x) \sin ax dx, \\ &\int P_n(x) \arctg x dx, \int P_n(x) \arcsin x dx, \\ &\int P_n(x) \cos x dx, \int P_n(x) \ln x dx. \end{aligned}$$

Дастлабки учта интегралда u учун $P_n(x)$ кўпхад қабул қилинади, охирги тўртта интегралда эса u учун $\arctg x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\ln x$ қабул қилинади.

Баъзи ҳолларда бўлақлаб интеграллаш формуласини бир неча марта қўллаш зарур бўлади.

5-мисол. $\int x e^{-5x} dx$ ни топинг.

Ечиш. $u=x$ ва $dv=e^{-5x} dx$ деб оламиз, у ҳолда

$$\begin{aligned}\int x e^{-5x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u=x, \quad du=dx, \\ dv=e^{-5x} dx, \quad v=\int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{x}{5} e^{-5x} - \frac{1}{25} e^{-5x} + C.\end{aligned}$$

v ни топишда интеграллаш доимийсини ҳар доим нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин.

6-мисол. $\int \arctg x dx$ ни топинг.

Ечиш. $u=\arctg x$ деб оламиз, у ҳолда

$$\begin{aligned}\int \arctg x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u=\arctg x, \quad du=\frac{dx}{1+x^2}, \\ dv=dx, \quad v=\int dx=x \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.\end{aligned}$$

7-мисол. $\int (x^2+1) \cos x dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Бу мисолда бўлақлаб интеграллаш формуласини икки марта қўллашга тўғри келади.

$$\begin{aligned}\int (x^2+1) \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u=x^2+1, \quad du=2x dx; \\ dv=\cos x dx, \quad v=\sin x \end{array} \right\} = \\ &= (x^2+1) \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \int \cos x dx) = \\ &= (x^2+1) \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = \\ &= 2x \cos x + (x^2-1) \sin x + C.\end{aligned}$$

8-мисол. Аниқмас интегрални ҳисобланг:

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.$$

Ечиш. Бу интегрални икки марта бўлақлаб интеграллаймиз.

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=e^{\alpha x}, \quad du=\alpha e^{\alpha x} dx; \\ dv=\cos \beta x dx, \quad v=\frac{1}{\beta} \sin \beta x \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{\alpha x}, du = \alpha \cdot e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin \beta x dx, v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \right) = \\
&= \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.
\end{aligned}$$

Бунда

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$$

деб ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I.$$

Бу тенгламани I га нисбатан ечсак,

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + C.$$

2- дарсхона топириғи

Аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$. Ж: $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}|$
2. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$. Ж: $x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + C.$
3. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+4}}$. Ж: $C - \frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}.$
4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$. Ж: $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x.$
5. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{1-x-x^2}}$. Ж: $C - \ln \left| \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x+1} \right|.$
6. $\int x \cdot \arcsin x dx$. Ж: $\frac{x^2+1}{2} \arcsin x - \frac{x}{2} + C.$
7. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. Ж: $C - x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x|.$